الملخص:

في السنوات الماضية كان للأنظمة الحركية العديد من التطبيقات في العلوم والهندسة وهذه تشمل الاهتزاز الميكانيكي، الليزر، الإيقاعات البيولوجية، دوائر التوصيل الكبيرة، وحالات تفشي الحشرة، والتذبذبات الكيميائية، وأنظمة التحكم بالجينات، وأمواج الماء، حتى أن لها دور في استخدام النظام الفوضوي لإرسال الرسائل السرية بعضها يندرج تحت عنوان التحليل الغير خطي ، خلف هذه التطبيقات هناك الكثير من الموضوعات الرياضية الغنية التي سوف نتناول أحدها في هذه الرسالة .

هذا الموضوع يركز على التكرار المداري للمعادلة الكسرية المختلفة وبالذات نحن مهتمون بالجانب التحليلي مثل التحليل حول نقطة التعادل، بالرغم من أننا نركز على الجانب التحليلي فإن للجانب الهندسي دور كبير في التعرف على صفات هذه المعادلة الكسرية المختلفة.

في هذه الرسالة تناولنا المعادلة الكسرية المختلفة التالية:

$$x_{n+1} = \frac{\beta x_n + \gamma x_{n-k}}{Bx_n + Cx_{n-k}}, n = 0,1,2,...(1)$$

حيث أن المتغيرات B ، C γ , β و العوامل الأولية x(-1) ,…, x(-k) عبارة عن أعداد حقيقية موجبة، k={1,2,…}.

كان تركيزنا على إيجاد حل لهذه المعادلة وملاحظة شكل هذا الحل بناء على العوامل الأولية المدخلة. لذلك أوجدنا فترات الحل الممكنة, الخصائص الدورية للحل إذا وجد, وكذلك مدى ثبات الحلول الموجبة للمعادلة (1).

حتى نتمكن من التعرف أو تحقق الصفات الدورية وكذلك مدى ثبات هذه المعادلة، سنستخدم Mathlab للتعرف على تصرف هذه المعادلة، Mathlab الآن يقدر على ايجاد حلول تقريبية لهذه المعادلة المختلفة وإنتاج رسومات عالية الدقة للتعرف على شكل هذه المعادلة وحلها إذ أنه يعتبر الأساس في بناء النظرية الرياضية، إلا أنه لا يثبتها لذلك سنستخدم تقنيات عديدة ومختلفة لتساعدنا على حل هذه المعادلة وإثباتها.

هناك العديد من الأوراق العلمية والكتيبات في موضوع الأنظمة الحركية ، إلا أن هناك نواحي عدة تجعل من هذه الرسالة تتميز عن غيرها من الإصدارات :-

أولاً : هذه الرسالة هي حل للمشكلة المفتوحة التي عرضها Kulenvic وLadas في كتابهم:

[Dynamics of Second Order Rational Difference Equations: with Open Problems and Conjectures, Chapman & Hall/CRC, Boca Rataon, 2002].

ثانياً: هذه الرسالة تعالج الموضوع من المنظور الرياضي الذي يحوي على براهين لمعظم النتائج ، البراهين التي لم ترد في هذه الرسالة هي إما تركت للقارىء ، أو ذكرت في أوراق علمية أخرى ، ومع ذلك سيجد القارىء المهتم بالجوانب الحسابية النتائج جاهزة دون أن يرهق نفسه بالنظر إلى البراهين .

ثالثاً: هذه الرسالة عنيت لتكون متطلب تخرج وليس مجرد ورقة علمية وهذا يعكس على الطريقة التي عرضت فيها الرسالة ، الأفكار طرحت من خلال أمثلة عملية للتعرف على النظرية والتطبيقات للبراهين والمواضيع ذات العلاقة .

التغيير التالي:

$$x_n = \frac{\gamma}{C} y_n$$

يحول المعادلة إلى الشكل:

$$y_{n+1} = \frac{py_n + y_{n-k}}{qx_n + y_{n-k}}, n = 0,1,2,...(2)$$

حيث أن:

$$p = \frac{\beta}{\gamma}, q = \frac{B}{C}.$$

المتغيرات p,q و العوامل الولية y(-1),…,y(-k) عبارة عن أعداد حقيقية موجبة، k={1,2,…}.

كما كان متوقعا، الحالتان p>q, p<q تعطيان أنظمة حركية مختلفة.

الحالة الأولى: p>q.

- نقطة التعادل ثابتة محليا.
- لا يوجد حل دوري ثنائي.
- الحل يتذبذب حول نقطة التعادل بشبه دورة طولها k+1 أو k+2 ما عدا شبه الدورة الأولى التي يمكن أن يكون طولها k .
- الحل محصور بين القيمتين 1, p/q.
- نقطة التعادل ثابتة مطلقا إذا تحقق الشرط التالي: p<=pq+3q+1.

الحالة الثانية: p<q.

يندرج تحت هذه الحالة الحالتان الفرعيتان التاليتان:

❖ **K عدد زوجي.**

- نقطة التعادل ثابتة محليا.
- الحل يتذبذب حول نقطة التعادل بشبه دورة طولها k بعد شبه الدورة الأولى أو يتناهى الى نقطة التعادل.
- الحل محصور بين القيمتين 1, p/q.

❖ **K عدد فردي.**

يندرج تحت هذه الحالة الحالتان الفرعيتان التاليتان:

- $q>pq+3p+1$.
  - نقطة التعادل غير ثابتة.
  - يوجد حل دوري ثنائي.
  - الحل يتذبذب حول نقطة التعادل بشبه دورة طولها k بعد شبه الدورة الأولى أو يتناهى الى نقطة التعادل.
  - الحل محصور بين القيمتين p/q ,1.

- $q<pq+3p+1$.
  - نقطة التعادل ثابتة محليا.
  - الحل يتذبذب حول نقطة التعادل بشبه دورة طولها k بعد شبه الدورة الأولى أو يتناهى إلى نقطة التعادل.
  - الحل محصور بين القيمتين p/q ,1.
  - نقطة التعادل ثابتة مطلقا.

إن النتائج التي حصلنا عليها في هذه الرسالة لها أهمية كبرى في حد ذاتها، بالإضافة إلى أنها تشكل الأساس لمعرفة ثبات الحل للمعادلات الكسرية المختلفة من الدرجة النونية.

إن النتائج و الطرق التي استخدمت في هذه الرسالة لها أهمية كبرى في تحليل النماذج الرياضية المستخدمة في كافة مناحي الحياة مثل النماذج المستخدمة في الأحياء و التطبيقات الأخرى.